Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A VII-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. Punctul O este intersecţia mediatoarelor laturilor triunghiului ABC. Fie D intersecţia dreptei AO cu segmentul BC. Ştiind că $OD = BD = \frac{1}{3} \cdot BC$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Soluţie şi barem de corectare. Distingem cazurile:

I. Triunghiul ABC este echilateral. Atunci O este punct interior triunghiului ABC. Notând cu E mijlocul segmentului DC, rezultă că triunghiul ODE este echilateral. . . . . 1 punct

De aici $\angle OEC = \angle ODB = 120°$ şi $\angle OBC = \angle OCB = 30°$. . . . . 1 punct

Triunghiul AOC este dreptunghic isoscel, deci $\angle OAC = \angle OCA = 45°$. În triunghiul isoscel AOB avem $\angle AOB = 150°$ şi $\angle OAB = \angle OBA = 15°$. 1 punct

În final obţinem $\angle ABC = 45°, \angle ACB = 75°$ şi $\angle BAC = 60°$. . . . 1 punct

II. Triunghiul ABC este obtuzunghic. Cum dreapta AO este incidentă segmentului BC, deducem că A este unghiul obtuz al triunghiului. . 1 punct

Analog obţinem $\angle OAC = \angle OCA = 45°$, de unde $\angle ACB = \angle OCA - \angle ECO = 15°$. Triunghiul AOB este isoscel cu $\angle AOB = 30°$, deci $\angle ABO = \angle BAO = 75°$. De aici $\angle BAC = 120°$ şi $\angle ABC = 45°$. . . . . 1 punct

Subiectul 2. O urnă conţine bile albastre şi bile roşii. O persoană a inventat următorul joc: extrage succesiv bile, până când constată că pentru prima dată numărul de bile albastre extrase este egal cu numărul de bile roşii extrase. La unul dintre jocuri constată că în final au fost extrase 10 bile şi că nu există 3 bile de aceeaşi culoare extrase consecutiv. Să se arate că în această situaţie a cincea şi a şasea bilă extrase au culori diferite.

Soluţie şi barem de corectare. Fără a restrânge generalitatea, considerăm că ultima bilă extrasă este roşie. Atunci a noua este tot roşie, altfel extragerea s-ar fi oprit după 8 bile. . . . . 2 puncte

A opta bilă este albastră, altfel ultimele 3 ar avea aceeaşi culoare.1 punct

A saptea bilă este roşie, altfel extragerea s-ar fi oprit după doar 6 bile. 1 punct

Acum, dacă bilele 5 şi 6 sunt roşii, se obţin 3 consecutive roşii, fals.1punct

Dacă bilele 5 şi 6 sunt albastre, atunci extragerea se opreşte după doar 4 bile, contradicţie. . . . . 1 punct

În concluzie bilele 5 şi 6 sunt diferit colorate. 1 punct

Subiectul 3. Fie a şi b numere naturale cu $b > a \geq 2$. Să se arate că dacă numărul $a + k$ este prim cu numărul $b + k$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, b - a$, atunci a şi b sunt numere consecutive.

Soluţie şi barem de corectare.

Fie $n = b - a$. Avem $(a+k, b+k) = (a+k, b+k-a-k) = (a+k, n) = 1$, oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots n$. . . . . 3 puncte

Secvenţa $a + 1, a + 2 \ldots, a + n$ are n numere consecutive; rezultă că unul dintre numere se divide cu n. . . . . .2 puncte.

Atunci $n = 1$ - altfel n nu ar fi prim cu acesta - deci numerele a şi b sunt consecutive şi satisfac cerinţa. . . . . .2 puncte

Subiectul 4. Fie n un număr natural compus. Să se arate că există numerele naturale $k > 1$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_k > 1$ astfel ca

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} \right).$$

Soluţie şi barem de corectare. Vom alege k numărul divirozilor proprii al lui n; cum n este compus, rezultă $k > 1$. Alegem $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ divizorii proprii ai lui n; . . . . 3 puncte

atunci $\frac{n}{a_1} > \frac{n}{a_2} > \ldots > \frac{n}{a_k}$ reprezintă tot divizorii proprii ai lui n, ... 2 puncte

de unde rezultă concluzia. . . . . 2 puncte